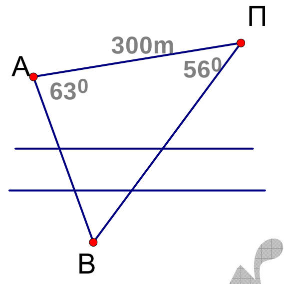
3.10 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 120 - 122

Α΄ Ομάδας

1.



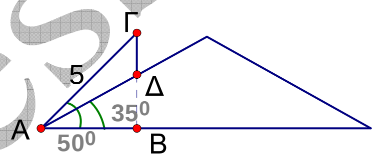
Δύο πύργοι Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ποταμού. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται προς το ίδιο μέρος του ποταμού με τον πύργο Α. Αν στο τρίγωνο ΠΑΒ είναι ΠΑ = 300m, $\hat{A} = 63^o$ και $\hat{\Pi} = 56^o$, να βρείτε την απόσταση των πύργων Α και Β.

Λύση

$\hat{B} = 180^o - \hat{A} - \hat{\Pi} = 180^o - 63^o - 56^o = 61^o$

Νόμος ημιτόνων: $\dfrac{AB}{\eta\mu 56^0} = \dfrac{300}{\eta\mu 61^0} \Rightarrow AB = \dfrac{300}{\eta\mu 61^0}\,\eta\mu 56^0$

2.



Ένας συλλέκτης ηλιακής ακτινοβολίας μήκους 5 m είναι τοποθετημένος στην οροφή ενός κτιρίου, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του βραχίονα με τον οποίο στηρίζεται ο συλλέκτης.

Λύση

Θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος του τμήματος ΔΓ

$\Delta\hat{A}\Gamma = 50^o - 35^o = 15^o$

$\Gamma\hat{\Delta}A = 90^o + 35^o = 125^o$ σαν εξωτερική του τριγώνου ΔΒΑ

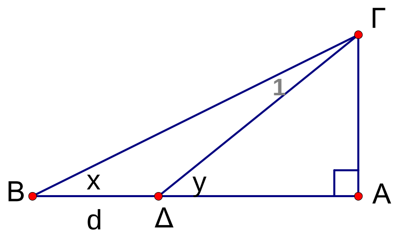
Νόμος ημιτόνων στο τρίγωνο ΓΔΑ: $\dfrac{\Delta\Gamma}{\eta\mu 15^0} = \dfrac{5}{\eta\mu 125^0} \Rightarrow \Delta\Gamma = \dfrac{5\eta\mu 15^0}{\eta\mu 125^0}$

3.

Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

i) $ΓΔ = \dfrac{d.ημx}{ημ(y-x)}$

ii) $ΑΓ = \dfrac{d.ημx.ημy}{ημ(y-x)}$



Λύση

i)

$y = x + \hat{Γ}_1$ σαν εξωτερική του τριγώνου ΔΒΓ $\Rightarrow$ $\hat{Γ}_1 = y - x$

Νόμος ημιτόνων στο τρίγωνο ΓΔΒ **:** $\dfrac{ΓΔ}{ημx} = \dfrac{d}{ημ(y-x)} \Rightarrow ΓΔ = \dfrac{d.ημx}{ημ(y-x)}$

ii)

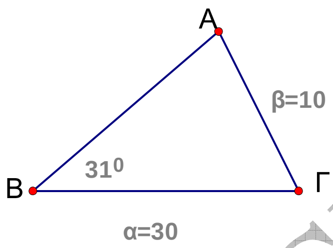
Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι ΑΓ = ΓΔ ημy.

Αντικατάσταση του ΓΔ: $ΑΓ = \dfrac{d.ημx}{ημ(y-x)}\,ημy \Rightarrow ΑΓ = \dfrac{d.ημx.ημy}{ημ(y-x)}$

4.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με α = 30, β = 10 και Β = 31^o.

Λύση



Αν υπήρχε τέτοιο τρίγωνο, με το νόμο ημιτόνων θα είχαμε $\dfrac{30}{ημΑ} = \dfrac{10}{ημ31^0} \Rightarrow$

$10\ ημΑ = 30\ ημ31^o \Rightarrow$

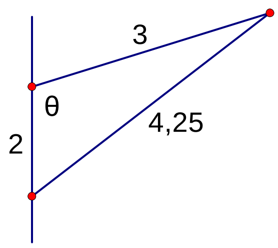
$ημΑ = 3\ ημ31^o > 3\ ημ30^o = 3\cdot\dfrac{1}{2} = 1{,}5 > 1$,

που είναι άτοπο.

5.

Να υπολογίσετε τη γωνία θ

του διπλανού σχήματος.



Λύση

Νόμος συνημιτόνων:

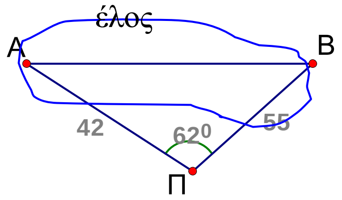
$(4,25)^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot συνθ \Rightarrow$

$18,06 = 4 + 9 - 12\ συνθ \Rightarrow$

$12\ συνθ = 13 - 18,06 \Rightarrow 12\ συνθ = -5,06 \Rightarrow συνθ\ -\dfrac{5,06}{12}$

6.

Να υπολογίσετε το μήκος του έλους του διπλανού σχήματος



Λύση

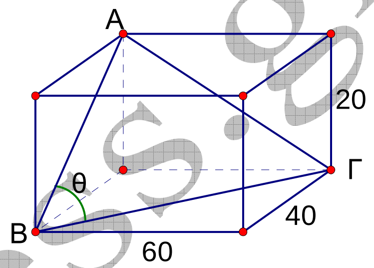
Νόμος συνημιτόνων:

$$AB^2 = 42^2 + 55^2 - 2\cdot 42\cdot 55\cdot συν62^0 =$$

$$1764 + 3025 - 4620\cdot συν62^o = 4789 - 4620\cdot συν62^o$$

7.

Να υπολογίσετε τη γωνία θ του ορθογωνίου κουτιού του διπλανού σχήματος.



Λύση

Με Πυθαγόρεια θεωρήματα υπολογίζουμε τις πλευρές του ΑΒΓ τριγώνου.

$$ΒΓ^2 = 60^2 + 40^2 = 3600 + 1600 = 5200$$

$$ΑΓ^2 = 60^2 + 20^2 = 3600 + 400 = 4000$$

$$ΑΒ^2 = 40^2 + 20^2 = 1600 + 400 = 2000$$

Νόμος συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ : $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2.ΑΒ.ΒΓ.συνθ$

$$4000 = 2000 + 5200 - 2\sqrt{2000}\ \sqrt{5200}\,συνθ$$

$$2\sqrt{2000}\ \sqrt{5200}\,συνθ = 3200$$

$$\sqrt{100.20}\ \sqrt{100.52}\,συνθ = 1600$$

$$10\sqrt{20}\ \ 10\sqrt{52}\ \ συνθ = 1600$$

$$2\sqrt{5}\ \ 2\sqrt{13}\ \ συνθ = 16$$

$$\sqrt{65}\ \ συνθ = 4$$

$$συνθ = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

8.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

κυκλικά

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

Προσθέτουμε: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

9.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha$$

Λύση

$$\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \beta\,\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} + \gamma\,\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha} + \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$$

10.

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu B$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$ και αντιστρόφως.

Λύση

$$\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu B \quad \Leftrightarrow \quad \beta\,\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} = \gamma\,\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha} = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$$

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = \gamma^2+\alpha^2-\beta^2$$

$$2\beta^2 = 2\gamma^2$$

$$\beta^2 = \gamma^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \gamma$$

11.

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\alpha = 2\beta\,\text{συν}\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$ και αντιστρόφως.

Λύση

$$\alpha = 2\beta\,\text{συν}\Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2\beta\,\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$$

$$\alpha = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = \alpha^2+\beta^2-\gamma^2$$

$$\beta^2 = \gamma^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \gamma$$

Β΄ Ομάδας

1.

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $B = 2A$, να αποδείξετε ότι

i) $\text{συν}A = \dfrac{\beta}{2\alpha}$ **ii)** $\beta^2 - \alpha^2 = \alpha\gamma$

Λύση

i)

$$B = 2A \;\Rightarrow\; \text{ημ}B = \text{ημ}2A \;\Leftrightarrow\; \text{ημ}B = 2\text{ημ}A\,\text{συν}A$$

$$\frac{\beta}{2R} = 2\cdot\frac{\alpha}{2R}\text{συν}A \quad (\text{ νόμος ημιτόνων})$$

$$\text{συν}A = \frac{\beta}{2\alpha}$$

ii)

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A \;\overset{(i)}{\Leftrightarrow}\; \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\alpha^3 = \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 - \beta^2\gamma$$

$$\alpha^3 - \alpha\gamma^2 = \alpha\beta^2 - \beta^2\gamma$$

$$\alpha(\alpha^2-\gamma^2) = \beta^2(\alpha-\gamma)$$

$$\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma) = \beta^2(\alpha-\gamma)$$

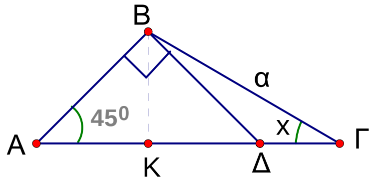
οπότε αν $\alpha \neq \gamma$ τότε $\alpha(\alpha+\gamma) = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta^2 - \alpha^2$

ενώ αν $\alpha = \gamma$ τότε $A = \Gamma$ οπότε λόγω και της $B = 2A$ θα ήταν $A = \Gamma = 45^\text{o}$ και επομένως $B = 90^\text{o}$ τότε η ζητούμενη σχέση $\beta^2 - \alpha^2 = \alpha\gamma$ γίνεται $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ η οποία ισχύει

2.

Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι :

$$ΓΔ = α(συνx - ημx)$$



Λύση

Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Φέρουμε $ΒΚ \perp ΑΔΓ$, οπότε και το τρίγωνο ΒΚΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Στο τρίγωνο ΒΚΓ ισχύει $ΚΓ = ασυνx$ και $ΚΔ = ΚΒ = αημx$

Επομένως $ΓΔ = ΚΓ - ΚΔ = ασυνx - αημx = α(συνx - ημx)$

3.i)

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $β = αημΒ$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Λύση

$β = αημΒ \Leftrightarrow 2R\,ημΒ = 2R\,ημΑ\,ημΒ$

$1 = ημΑ$

$Α = 90^o$

3.ii)

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $αημΑ = βημΒ + γημΓ$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Λύση

$αημΑ = βημΒ + γημΓ \Leftrightarrow α\dfrac{α}{2R} = β\dfrac{β}{2R} + γ\dfrac{γ}{2R}$

$α^2 = β^2 + γ^2 \Leftrightarrow$ ορθογώνιο

4.

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $ασυνΑ = βσυνΒ$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές

Λύση

$ασυνΑ = βσυνΒ \Leftrightarrow 2R\,ημΑ\,συνΑ = 2R\,ημΒ\,συνΒ$

$ημ2Α = ημ2Β$

$2Α = 2Β$ ή $2Α + 2Β = 180^o$

$Α = Β$ ή $Α + Β = 90^o$

$Α = Β$ ή $Γ = 90^o$

5.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \text{εφ}\frac{A-B}{2}.\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}$$

Λύση

$$\alpha-\beta = 2R\text{ημ}A - 2R\text{ημ}B$$
$$= 2R(\text{ημ}A - \text{ημ}B)$$
$$= 2R\ 2\text{ημ}\frac{A-B}{2}\text{συν}\frac{A+B}{2} = 4R\ \text{ημ}\frac{A-B}{2}\text{ημ}\frac{\Gamma}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

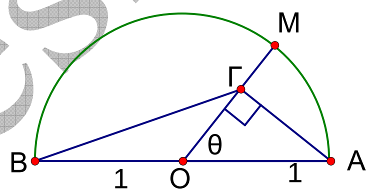
$$\alpha+\beta = 2R\text{ημ}A + 2R\text{ημ}B$$
$$= 2R(\text{ημ}A + \text{ημ}B)$$
$$= 2R\ 2\text{ημ}\frac{A+B}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2} = 4R\ \text{συν}\frac{\Gamma}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \text{εφ}\frac{A-B}{2}.\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}$$

6.

Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

$$B\Gamma^2 = \frac{5+3\text{συν}2\theta}{2}$$



Λύση

Νόμος συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΓ:

$$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2 - 2\ OB\cdot O\Gamma\cdot\text{συν}(180^o - \theta) \qquad \textbf{(1)}$$

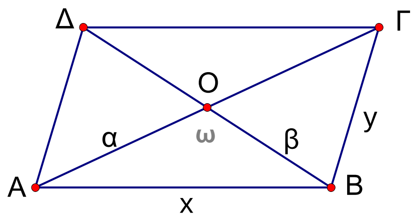
Από το τρίγωνο ΓΟΒ έχουμε ΟΓ = ΟΑ συνθ = 1 συνθ = συνθ.

Θυμόμαστε ότι συν(180° – θ) = συνθ

$$(1) \Rightarrow B\Gamma^2 = 1 + \text{συν}^2\theta - 2\cdot1\ \text{συν}\theta\ (-\text{συν}\theta) =$$
$$1 + \text{συν}^2\theta + 2\ \text{συν}^2\theta =$$
$$1 + 3\text{συν}^2\theta =$$
$$1 + 3\ \frac{1+\text{συν}2\theta}{2} = \frac{2+3+3\text{συν}2\theta}{2} = \frac{5+3\text{συν}2\theta}{2}$$

7.

Να αποδείξετε ότι για το διπλανό παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ισότητες



i) $x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$

ii) (ΑΒΓΔ) = 2αβημω

Λύση

i)

Νόμος συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ: $x^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$ συνω

Νόμος συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΓ: $y^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$ συν$(180^o - \omega)$

$= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta(-$ συνω$)$

$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ συνω

Άρα $x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$

ii)

(ΑΒΓΔ) = 4 (ΟΑΒ) = 4. $\frac{1}{2}$ α.β ημω = 2αβ ημω